第 26 講　数列(4)

1　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項，および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，すべての自然数 n について

$$3S_n = a_n + 7\cdot 3^n - 6$$

が成立するとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n および n の式で表せ．

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_n の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$　…①　($n=1$，2，3，…)　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，a_n と S_n の間には関係式

$S_n=\frac{1}{3}(2^n-a_n-6)$　が成り立つ．

(1)　初項を a_1 とすると，$a_1=$ アイ である．

(2)　S_{n+1} と S_n の差は　$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{\boxed{ウ}}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-\boxed{エ}^n)$ となる．

よって　a_n と a_{n+1} との関係式　$a_{n+1}=\frac{1}{\boxed{オ}}a_n+\boxed{カ}^{n-2}$　が成り立つ．

(3)　$b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{\boxed{キ}}b_n+\frac{1}{\boxed{ク}}$ となる．

したがって　$a_n=\frac{1}{\boxed{ケ}}\left\{2^n-\boxed{コ}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　となる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　数列(4)

1　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項，および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{3a_{n+1}+4(n+1)\}-(3a_n+4n)$

$=3(a_{n+1}-a_n)+4=3b_n+4$　　よって　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+4}$　……①

(2)　$b_1=a_2-a_1=(3a_1+4\cdot1)-1=6$

また①は　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$ と変形できる．

よって　$\{b_n+2\}$ は　初項 $b_1+2=8$　公比 3 の等比数列である．

したがって　$b_n+2=8\cdot3^{n-1}$　より　$\boldsymbol{b_n=8\cdot3^{n-1}-2}$

また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ より　$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列である．

よって　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$

$$=4\cdot3^{n-1}-2n-1\quad(n=1\text{ のときにも成り立つ})$$

したがって　$\boldsymbol{a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1}$

2　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，すべての自然数 n について

$$3S_n=a_n+7\cdot3^n-6$$

が成立するとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n および n の式で表せ．

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_n の一般項を求めよ．

$3S_n=a_n+7\cdot3^n-6$

$n=1$ のとき　$3S_1=a_1+7\cdot3^1-6$　つまり　$3a_1=a_1+7\cdot3^1-6$　　よって　$a_1=\dfrac{15}{2}$

(1)　$3a_{n+1}=3S_{n+1}-3S_n=(a_{n+1}+7\cdot3^{n+1}-6)-(a_n+7\cdot3^n-6)$

$2a_{n+1}=-a_n+14\cdot3^n$　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+7\cdot3^n}$　……①

(2)　①の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{3^{n+1}}+7\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{7}{3}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{7}{3}$，$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{5}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$b_{n+1}-2=-\dfrac{1}{6}(b_n-2),\ b_1-2=\dfrac{1}{2}$

よって　$b_n-2=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$　より　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}+2}$

3　$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$　…①　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

①は

$$\begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n & \cdots\cdots② \\ a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n) & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

と変形できる.

$a_2+2a_1=6$ より　②から　$a_{n+1}+2a_n=6$

$a_2-a_1=3$ より　③から　$a_{n+1}-a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

この２式より　$a_n=\dfrac{1}{3}\{6-3\cdot(-2)^{n-1}\}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2-(-2)^{n-1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，a_n と S_n の間には関係式

$S_n=\dfrac{1}{3}(2^n-a_n-6)$　が成り立つ．

(1)　初項を a_1 とすると，$a_1=$ [アイ] である．

(2)　S_{n+1} と S_n の差は　$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{[ウ]}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-[エ]^n)$ となる．

よって　a_n と a_{n+1} との関係式　$a_{n+1}=\dfrac{1}{[オ]}a_n+[カ]^{n-2}$　が成り立つ．

(3)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{[キ]}b_n+\dfrac{1}{[ク]}$ となる．

したがって　$a_n=\dfrac{1}{[ケ]}\left\{2^n-[コ]\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　となる．

(1)　$n=1$ のとき　$S_1=\dfrac{1}{3}(2-a_1-6)$　つまり　$a_1=\dfrac{1}{3}(2-a_1-6)$　　よって　$a_1=\mathbf{-1}$

(2)　$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{3}(2^{n+1}-a_{n+1}-6)-\dfrac{1}{3}(2^n-a_n-6)=\dfrac{1}{\mathbf{3}}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-\mathbf{2}^n)$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(2\cdot 2^n-a_{n+1}+a_n-2^n)$　　$3a_{n+1}=2^n-a_{n+1}+a_n$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{2^n}{4}$　　よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{\mathbf{4}}a_n+\mathbf{2}^{n-2}$

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+2^{n-2}$　より　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a_n}{2^{n+1}}+\dfrac{2^{n-2}}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{8}$

よって　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$　とおくと

$b_{n+1}=\dfrac{1}{\mathbf{8}}b_n+\dfrac{1}{\mathbf{8}}$　　つまり　$b_{n+1}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{8}\left(b_n-\dfrac{1}{7}\right)$　　$b_1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{a_1}{2^1}-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{9}{14}$

したがって　数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{7}\right\}$ は　初項 $-\dfrac{9}{14}$　公比 $\dfrac{1}{8}$　の等比数列である．

よって　$b_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{9}{14}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}$　　$b_n=\dfrac{1}{7}\left\{1-\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$a_n=2^nb_n=\dfrac{1}{\mathbf{7}}\left\{2^n-\mathbf{9}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。